LA NUMERATION

Objectifs: *• Connaître les différents systèmes de numération.*
• Savoir convertir un nombre décimal dans différentes bases.

Introduction:

• Depuis la nuit des temps, l'Homme a eu besoin de ***compter*** *et de* ***calculer****. Selon les civilisations, divers* ***systèmes de numération*** *on été mis en place puis abandonnés.*
• A l'heure actuelle, nous utilisons ***le système de numération décimal****. Ce système s'est imposé en Europe à partir du 10ème siècle. Aujourd'hui le système décimal est quasiment universel. Cependant il est mal adapté au codage des informations pour un ordinateur: on lui préfère le* ***système binaire****.*

I. LES BASES DE NUMERATION

1) Chiffre (ou symbole) et nombre

• Dans toute numération, il faut distinguer les **chiffres** (ou symboles) et les **nombres**.
• Un **nombre** est le résultat du comptage d'un ensemble d'objets, d'animaux, de personnes ... Un **nombre** s'écrit avec un ou plusieurs **chiffres** (ou symboles).

a) Combien de chiffres comporte le système de numération décimal ? Les écrire.
b) « 12 » est-il un nombre ou chiffre ? Justifier.

2) Numération additive et numération de position

• Afin de dénombrer des ensembles, l'Homme a dû mettre au point des techniques de numération. Il existe deux grandes techniques de numération: ***la numération additive*** *et* ***la numération de position****.*

• Dans la **numération additive**, chaque symbole a une valeur propre et il suffit d'ajouter les valeurs des symboles pour obtenir le nombre.
• Dans la **numération de position**, la valeur des symboles change en fonction de leur place dans le nombre.

a) Dans le système de numération décimal, le chiffre « **7 »** des nombres « **7**1 » et « 1**7 »** a-t-il la même signification ? Que représente le chiffre « **7 »** dans le nombre **7**1 et le chiffre **7** dans le nombre 1**7** ?
b) Le **système décimal** est-il un système de numération **additive** ou de **position** ?
c) Dans un système de **numération additive**, « **7**1 » et « 1**7 »** ont-il la même signification ? Si oui laquelle ?
d) Dans un système de **numération additive**, le « zéro » est-il utile ? Donner un exemple.

3) Quelques bases de numération positionnelles

*• Les Hommes ont pris l'habitude de compter par "****paquets****".*
La ***numération décimale*** *regroupe les éléments à dénombrer par «* ***paquets de dix »****. On dit qu'on utilise la* ***base dix*** *ou* ***base décimale****.*
Le tableau ci-contre présente quelques unes des principales bases de numération de position.

Base	Système
2	Binaire
8	Octal
10	**Décimal**
12	Duodécimal
16	Hexadécimal
20	Vicésimal
60	Sexagésimal

*Nous allons écrire le nombre **2583** dans différentes bases. Etudier attentivement l'exemple donné pour les bases 10.*

<u>En base 10 :</u> on utilise **les chiffres de 0 à 9 et les puissances de 10.**

Numéro du rang	Rang **5**	Rang **4**	Rang **3**	Rang **2**	Rang **1**	Rang **0**	
Chiffres	0	0	2	5	8	3	
Valeur	0×10^5	0×10^4	2×10^3	5×10^2	8×10^1	3×10^0	
	0 +	0 +	2000 +	500 +	80 +	3	= 2583

<u>En base 8 :</u> on utilise **les chiffres de 0 à 7 et les puissances de 8.**

Numéro du rang	Rang 5	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres	…	…	…	…	…	…	
Valeur	… $\times 8^5$	… $\times 8^4$	… $\times 8^3$	… $\times 8^2$	… $\times 8^1$	… $\times 8^0$	
	0 +	… +	… +	… +	… +	…	= 2583

2583 = … $\times$ $\mathbf{8^3}$ + … $\times$ $\mathbf{8^2}$ + … $\times$ $\mathbf{8^1}$ + … $\times$ $\mathbf{8^0}$

ainsi $\mathbf{(2583)_{décimal}}$ **= (……..)**$_{\mathbf{octal}}$

a) En vous basant sur l'exemple de la base 10, compléter les pointillés ci-dessus.

- **en base 16**: on utilise les chiffres de **0** à **9** puis les lettres de **A** à **F** et les puissances de **16**.

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Numéro du rang	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres	…	…	…	…	
Valeur	… $\times 16^3$	… $\times 16^2$	… $\times 16^1$	… $\times 16^0$	
	…	…	…	…	= 2583

2583 = … $\times$ $\mathbf{16^2}$ + … $\times$ $\mathbf{16^1}$ + … $\times$ $\mathbf{16^0}$

ainsi $\mathbf{(2583)_{décimal}}$ **= (……)** $_{\mathbf{hexadécimal}}$

b) Compléter les pointillés ci-dessus.

<u>En base 2</u>: on utilise les chiffres **0** et **1** et **les puissances de 2**

Numéro du rang	Rang 11	Rang 10	Rang 9	Rang 8	Rang 7	Rang 6	Rang 5	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres	…	…	1	…	…	…	…	1	…	…	…	1	
Valeur	…x 2^{11}	…x 2^{10}	1 x2^9	…x2^8	…x2^7	…x2^6	…x2^5	1x2^4	…x2^3	…x2^2	…x2^1	1x2^0	
	...	+ ...	+ 512	+ ...	+ ...	+ ...	+ ...	+ 16	+ ...	+ ...	+ ...	+ ...	= 2583

2583 = …x$\mathbf{2^{11}}$ + …x$\mathbf{2^{10}}$ + 1x$\mathbf{2^9}$ + …x$\mathbf{2^8}$ + …x$\mathbf{2^7}$ + …x$\mathbf{2^6}$ + …x$\mathbf{2^5}$ + 1$\times$ $\mathbf{2^4}$ + …x$\mathbf{2^3}$ + …x$\mathbf{2^2}$ + …x$\mathbf{2^1}$ + 1 $\times$ $\mathbf{2^0}$

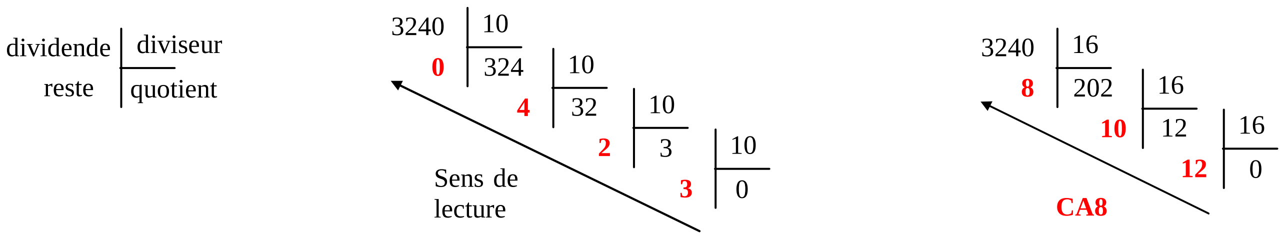
ainsi $\mathbf{(2583)_{décimal}}$ **= (…………………..)**$_{\mathbf{binaire}}$

c) Compléter les pointillés ci-dessus.

4) Méthode de décomposition d'un nombre dans une base par la méthode des divisions successives

• *La méthode de décomposition par **divisions successives** consiste à diviser le nombre plusieurs fois (si nécessaire) dans la base choisie jusqu'à obtenir un **quotient nul**.*
• *Les **restes successifs** des divisions, pris dans leur **ordre inverse**, forment le nombre désiré.*

• Etudier les exemples ci-dessous qui montrent la décomposition du nombre 3240 dans la base 10, puis dans la base 16.



Décomposition en base 10 Décomposition en base 16

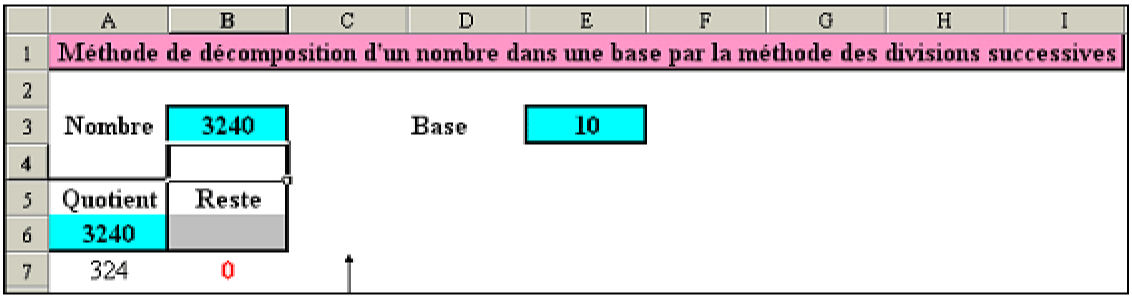
a) Traduire le nombre $(2010)_{dec}$ en base 16.
b) Traduire de même, le nombre $(2010)_{dec}$ en base 8 puis en base 2.

• *Ces calculs longs et fastidieux, peuvent être **automatisés** avec un tableur comme Excel. En effet, Excel possède deux fonctions utiles pour ce type de calcul:*
- **Quotient**(dividende; diviseur): elle donne **le quotient** de la division du **dividende** par le **diviseur**
- **Mod**(dividende; diviseur): elle donne **le reste** de la division du **dividende** par **le diviseur**

Exemples: si dans une cellule on tape: = quotient(3240; 10)
il s'affiche la valeur 324 car 3240 /10 = 324
si dans une cellule on tape: = mod(3240; 10)
il s'affiche la valeur 0 car le reste de la division 3240 /10 = 324 est égal à 0.

Remarque: pour que ces fonctions soient actives dans Excel, il faut que les macros complémentaires:
- Utilitaire d'analyse
- Utilitaire d'analyse VBA
soient sélectionnées.

• Ouvrir le fichier « **Méthode de décomposition par divisions successives élève.xls** ».



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Méthode de décomposition d'un nombre dans une base par la méthode des divisions successives								
2									
3	Nombre	3240		Base	10				
4									
5	Quotient	Reste							
6	3240								
7	324	0							

a) Quelle fonction doit-on taper dans la cellule **A7** pour quelle donne **le quotient** de la **division** de **A6** par la base **E3** ?
*Remarque: pour que la valeur de **E3** soit considérée comme une constante on tapera: **E3** .*

*Faire vérifier votre formule et la taper dans la cellule **A7**.*

b) Quelle fonction doit-on taper dans la cellule **B7** pour quelle donne **le reste** de la division de **A6** par la base **E3** ? Faire vérifier votre formule et la taper dans la cellule **B7**.

c) Sélectionner les cellules **A7** et **B7** et copier les formules "**en tirant**" les cellules vers le bas avec la croix dans le coin droit en bas. Tirer jusqu'à la ligne **28**. A partir de quelle valeur de la colonne **Quotient** peut-on lire le nombre dans la base choisie dans la colonne **Reste** ? Enregistrer le fichier.

d) Vérifier avec le logiciel Excel les calculs effectués en a) et b) pour le nombre 2010. Essayer d'autres bases (2, 12, 20, 60 ....).